
Teoría de la integral y de la medida, 2020-21
Hoja n^o 6 (*Medidas de Lebesgue-Stieltjes*)

1.- Definimos

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ x & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ 4 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Sea dF la medida de Lebesgue Stieltjes asociada a F . Calcular: $dF\{1\}$, $dF\{2\}$, $dF\{(1, 3)\}$, $dF\{(1, 3)\}$, $dF\{[1, 3]\}$, $dF\{[1, 3)\}$.

SOL: $dF\{1\} = F(1) - F(1^-) = 1$, $dF\{2\} = 0$, $dF\{(1, 3)\} = F(3) - F(1) = 3$, $dF\{(1, 3)\} = F(3^-) - F(1) = 2$, $dF\{[1, 3]\} = F(3) - F(1^-) = 4$, $dF\{[1, 3)\} = F(3^-) - F(1^-) = 3$.

2.- Dar un ejemplo de una función de distribución F tal que $dF(a, b) < F(b) - F(a) < dF[a, b]$ para algún a y b siendo dF la medida correspondiente a F .

SOL: Ver ejercicio anterior.

3.- Sea μ la medida de contar sobre $\mathbb{R}$ y $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Para un conjunto fijado $A \subset \mathbb{R}$, definimos $\nu(B) = \mu(B \cap A)$ para todo $B \subset \mathbb{R}$

a) Si $A = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ ¿es ν una medida de Lebesgue Stieltjes? En caso afirmativo hallar su función de distribución.

b) Si $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$ ¿es ν una medida de Lebesgue Stieltjes? En caso afirmativo hallar su función de distribución.

SOL: a) Sí, por ser finita sobre conjuntos acotados: $\nu((a, b]) = \sum_{n \in (a, b]} 1 < \infty$. Además:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ [x], & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

b) No, por no ser finita sobre conjuntos acotados: $\nu((0, 1]) = \sum_{n: 1/n \in (0, 1]} 1 = \infty$.

4.- Sea $F(x)$ la función de distribución sobre $\mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (-\infty, -1) \\ 1+x & \text{si } x \in [-1, 0) \\ 2+x^2 & \text{si } x \in [0, 2) \\ 9 & \text{si } x \in [2, \infty) \end{cases}$$

Si dF es la medida de Lebesgue Stieltjes correspondiente a F , hallar la medida dF de los siguientes conjuntos: $\{2\}$, $[-1/2, 3)$, $(-1, 0] \cup (1, 2)$, $[0, 1/2) \cup (1, 2]$, $\{x \in \mathbb{R} : |x| + 2x^2 > 1\}$.

SOL: Semejante al ejercicio 1.

Calculamos solo la medida de $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| + 2x^2 > 1\} = (-\infty, -1/2) \cup (1/2, \infty)$:
 $\nu(A) = F(+\infty) - F(1/2) + F(-1/2^-) - F(-\infty) = 9 - 9/4 + 1/2 = 29/4$

5.- a) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ no-negativa e integrable Lebesgue y tal que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. Probar que $F(x) = \int_{-\infty}^x f(y)dy$ es una función de distribución de probabilidad y además F es continua. (f se denomina **función de densidad**)

b) Si $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [0, 1], \\ 0, & \text{en el resto,} \end{cases}$ hallar $F(x)$.

SOL: a) F es creciente (por ser f positiva) y continua porque

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{h \rightarrow 0^+} (F(x+h) - F(x)) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \int_x^{x+h} f(t) dt = 0, \\ \lim_{h \rightarrow 0^+} (F(x-h) - F(x)) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \int_{x-h}^x f(t) dt = 0, \end{array} \right. \quad \text{ambos por T.C.D.}$$

$$\text{b) } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0, \\ x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

6.- Sea

$$f(x) = \begin{cases} kx(1-x), & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases} \quad k > 0$$

Determinar el valor de k para que f sea la función de densidad de una medida de probabilidad.
Determinar la función de distribución.

$$\text{SOL: } k = 6, \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ 3x^2 - 2x^3, & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 1, & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

7.- Supongamos que la función de probabilidad que mide la duración en minutos de las conferencias telefónicas viene dada por la función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-kx}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

siendo $k \geq 0$ una constante conocida.

a) Hallar α para que f sea una densidad de probabilidad.

b) Si $k = \frac{1}{2}$, calcular la probabilidad de que una conversación dure mas de tres minutos.

c) Si $k = \frac{1}{2}$, calcular la probabilidad de que una conversación dure entre 3 y 6 minutos.

SOL: a) $\alpha = k$.

$$\text{b) } P(X > 3) = \int_3^\infty \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} dx = e^{-\frac{3}{2}}, \quad \text{c) } P(3 < X < 6) = \int_3^6 \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} dx = e^{-\frac{3}{2}} - e^{-3}.$$

8.- Dada la función de distribución

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (-\infty, -1) \\ \frac{1}{3} & \text{si } x \in [-1, \sqrt{2}) \\ \frac{1}{2} + \frac{x-\sqrt{2}}{10} & \text{si } x \in [\sqrt{2}, 5) \\ 1 & \text{si } x \in [5, \infty) \end{cases}$$

Si dF es la medida de probabilidad correspondiente, calcular la medida de los conjuntos:

$\mathbb{R}; \quad (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [\sqrt{2}, 5]; \quad (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [-2, \sqrt{2}]; \quad \mathbb{Q} \cap [1, 6].$

SOL: Observamos primero que $dF(\mathbb{Q}) = dF(\{-1\}) + dF(\{5\}) = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{10}$, porque F es continua en todos los puntos racionales salvo en -1 y en 5 . Deducimos:

$$dF(\mathbb{R}) = F(+\infty) - F(-\infty) = 1,$$

$$dF((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [\sqrt{2}, 5]) = dF([\sqrt{2}, 5]) = F(5^-) - F(\sqrt{2}^-) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{10} - \frac{1}{3},$$

$$dF((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [-2, \sqrt{2}]) = dF([-2, \sqrt{2}]) - dF(\{-1\}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

$$dF(\mathbb{Q} \cap [1, 6]) = dF(\{5\}) = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

9.- Sea F una función de distribución en $\mathbb{R}$. a) Probar que el conjunto de puntos de discontinuidad de F es numerable. b) Probar que el conjunto de puntos de continuidad es denso en $\mathbb{R}$.

(Sugerencia: F es monótona luego en sus puntos de discontinuidad hay saltos).

SOL: En cada punto de discontinuidad z podemos elegir un $q_z \in \mathbb{Q}$ tal que $F(z^-) < q_z < F(z)$. Por ser F creciente, estos q_z son todos distintos, luego a lo sumo hay un número numerable de discontinuidades.

10.- Sea dF la medida de Lebesgue Stieltjes sobre $\mathbb{R}$ correspondiente a una función de distribución continua F no trivial.

a) Probar que si A es numerable entonces $dF(A) = 0$.

b) Probar que existen conjuntos A tales que $dF(A) > 0$ y A no contiene ningún intervalo abierto.

c) Si $dF(\mathbb{R} \setminus A) = 0$, ¿tiene que ser A denso en $\mathbb{R}$?

Sugerencia: Para c) construir una función $F(x)$ que sea constante en un intervalo.

SOL: a) Por ser A numerable se tiene $dF(A) = \sum_{x \in A} dF(\{x\})$. Esta suma vale 0 por ser F continua $\forall x$.

11.- Sea $F : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ la función de distribución definida mediante $F(x) = \log(1+x)$, sea dF la medida de Lebesgue Stieltjes asociada a F . Calcular $dF \{ \text{Cantor} \}$.

Sugerencia: El conjunto de Cantor está contenido en 2^n intervalos de longitud $\frac{1}{3^n}$.

SOL: Lo hacemos directamente sin seguir la sugerencia: como F es derivable en $(0, \infty]$, se tiene $dF(x) = f(x) dx$ con $f(x) = F'(x) = \frac{1}{1+x}$, si $x > 0$ y $f(x) = 0$ si $x < 0$. De esta forma concluimos que

$$dF(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} f(x) dx = \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{1+x} dx = 0,$$

porque el conjunto de Cantor tiene medida 0 con respecto a la medida de Lebesgue.

12.- Sea $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de distribución y sea $G \subset \mathbb{R}$ un conjunto abierto. Supongamos que F es localmente constante en G (esto equivale a decir que F es constante sobre cualquier intervalo abierto, contenido en G). Demostrar que $\mu_F^*(G) = 0$, donde μ_F es la medida de Lebesgue-Stieltjes asociada. Deducir que en este caso, cualquier subconjunto de G es medible respecto de μ_F .

SOL: G es una unión numerable de intervalos abiertos I_j . Se obtiene de forma directa que $\mu_F(I_j) = 0$ para todo j (representar I_j como una unión numerable de intervalos semi-abiertos). De aquí se siguen fácilmente el resto de las afirmaciones.